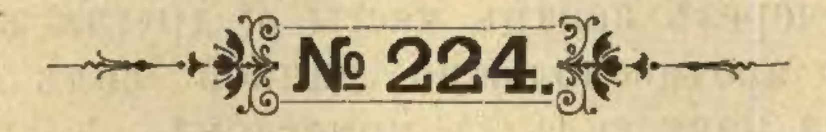
XIX Сем. 1-го Ноября 1895 г. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



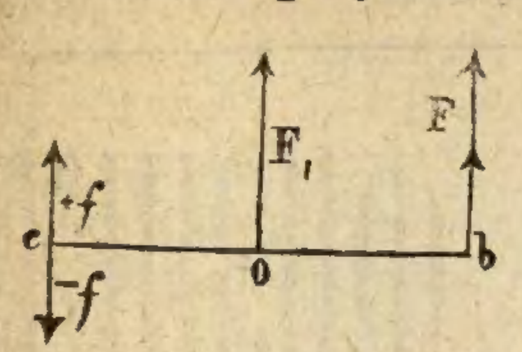
ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ПОЯСНЕНIЕ
одного случая дѣйствiя силы
на
ТВЕРДОЕ ТѢЛО.

Въ настоящей замѣткѣ нѣтъ ничего новаго въ научномъ смыслѣ; она имѣетъ исключительно педагогическое значенiе; разбираемый въ ней вопросъ давно рѣшенъ въ наукѣ и не возбуждаетъ никакихъ сомнѣнiй. Но въ элементарныхъ курсахъ онъ излагается иногда недостаточно полно и обстоятельно и потому допускаетъ недоразумѣнiя. Разъясненiю этихъ недоразумѣнiй и посвящена настоящая замѣтка.

I.

Какъ извѣстно, дѣйствiе силы на твердое тѣло (будетъ ли это отдѣльная самостоятельная сила, или равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ) зависитъ отъ положенiя точки ея приложенiя. Если сила приложена къ центру массы его, то она возбуждаетъ одно лишь поступательное движенiе (всѣ элементы тѣла прiобрѣтаютъ равныя и параллельныя скорости). Если та же сила проходитъ не черезъ центръ массы, то, какъ указываетъ теоретическiй выводъ, она возбуждаетъ то же самое поступательное движенiе, да кромѣ того еще и вращательное около оси, проходящей черезъ центръ массы и перпендикулярной къ направленiю силы.

Этотъ результатъ выводится обыкновенно слѣдующимъ образомъ (фиг. 44): прямую *bo*, соединяющую центръ *o* съ точкой приложенія *b* данной силы F, продолжаютъ на такое же разстояніе $oc = ob$ по другую сторону центра, и къ концу ея *c* прилагаютъ двѣ противоположныя силы, параллельныя данной силѣ и равныя, каждая, половинѣ ея величины. Эти двѣ силы, какъ равныя и прямо противоположныя, взаимно уравновѣшиваются, а потому не измѣняютъ механическихъ условій тѣла. Но одна изъ нихъ $+f$, направленная въ одну сторону съ данной силой F, сложенная съ половиной этой силы, даетъ равнодѣйствующую F_1, равную данной силѣ F, но проходящую черезъ центръ массы *o*; другая же вспомогательная сила, направленная противоположно данной силѣ F, составляетъ съ другой половиной ея пару силъ съ моментомъ



Фиг. 44.

$$\frac{1}{2} F \times 2l = Fl$$

(если F перпендикулярна къ *l*). Равнодѣйствующая F_1 сообщаетъ свободному тѣлу такое же поступательное движеніе, какъ и равная ей данная сила F, еслибъ она проходила черезъ центръ тяжести. Пара же силъ Fl сообщаетъ тѣлу соотвѣтствующее вращательное движеніе вокругъ центра *o*.

Этимъ обыкновенно и заканчивается выводъ, но безъ всякихъ дальнѣйшихъ поясненій и потому даетъ поводъ къ вопросу: какимъ образомъ одна и та же сила, приложенная въ центрѣ, возбуждаетъ кинетическую энергію одного лишь поступательнаго движенія; приложенная же внѣ центра, возбуждаетъ такое же количество энергіи поступательнаго движенія, да еще сверхъ того нѣкоторое количество энергіи вращательнаго движенія.

Точно провѣрить на опытѣ теоретическіе выводы механики трудно, такъ какъ мы не имѣемъ вполнѣ свободнаго тѣла, вслѣдствіе дѣйствія тяжести на всѣ тѣла. Несогласныя съ этимъ выводомъ движенія сталкивающихся упругихъ билліардныхъ шаровъ не могутъ служить опроверженіемъ его, такъ какъ эти движенія происходятъ при совершенно иныхъ условіяхъ. Приблизительно провѣрить выводъ можно на тѣлѣ, подвѣшенномъ на длинной нити; толчекъ, сообщенный такому тѣлу въ горизонтальной плоскости, проходящей черезъ центръ его тяжести, дѣйствительно сообщаетъ ему требуемыя движенія.

Если условія опыта и не допускаютъ строгой провѣрки вывода, то все таки въ вѣрности выведеннаго результата сомнѣваться нельзя, такъ какъ выводы теоретической механики столь же достовѣрны, какъ и выводы геометріи и вполнѣ соотвѣтствуютъ принятымъ въ разсчетъ условіямъ движенія.

Откуда же берется добавочное количество энергіи, когда сила проходитъ не черезъ центръ массы тѣла?*)

*) Такой вопросъ мнѣ случалось предлагать лицамъ, получившимъ высшее физико-математическое образованіе, но я почти никогда не получалъ удовлетворитель-

II.

Сначала опредѣлимъ, независимо отъ вышеприведеннаго вывода, вліяніе точки приложенія силы на видъ возбуждаемаго движенія. Для этого разсмотримъ общія условія движенія твердаго тѣла. Частицы такого тѣла, вслѣдствіе связей между ними, могутъ двигаться лишь не измѣняя своего относительнаго расположенія; по этой причинѣ движеніе твердаго тѣла можетъ быть только или поступательное, или вращательное около нѣкоторой постоянной либо перемѣнной оси, либо поступательное и вращательное вмѣстѣ. Во всѣхъ этихъ случаяхъ частицы тѣла имѣютъ совершенно опредѣленныя движенія.

Тѣ же движенія могли бы быть сообщены и свободнымъ не связаннымъ между собою частицамъ, безъ измѣненія ихъ относительнаго расположенія, приложенными къ нимъ силами, направленными вдоль движенія, и пропорціональными массами этихъ частицъ и ихъ ускореніямъ. Измѣненіе этого соотношенія между силами вызвало бы измѣненіе взаимнаго расположенія свободныхъ частицъ.

Та же пропорціональность силъ массамъ частицъ и ихъ ускореніямъ должна быть и въ системѣ сцѣпленныхъ между собою частицъ,— т. е. въ твердомъ тѣлѣ, такъ какъ еслибъ это соотношеніе измѣнилось хоть на мгновеніе, силы стремились бы измѣнить относительное расположеніе частицъ и тѣмъ самымъ вызвали бы тяги и давленія между ними; вслѣдствіе этого произошла бы передача силы отъ одной частицы къ другой, перераспредѣленіе силъ между ними, до прекращенія тягъ и давленій, т. е. до возстановленія пропорціональности соотвѣственныхъ силъ массамъ и ускореніямъ частицъ.

Такимъ образомъ всякая сила, приложенная къ свободному твердому тѣлу, неизбѣжно должна распредѣлиться по всѣмъ частицамъ его,— разложиться на систему силъ, находящихся въ извѣстномъ соотношеніи между собою, смотря по роду возбуждаемаго движенія. Это соотношеніе даетъ возможность опредѣленнаго рѣшенія задачи: разложенія данной силы, приложенной къ твердому тѣлу, на множество силъ — задачи вообще неопредѣленной безъ этого ограничительнаго условія. Такъ какъ всякая сила можетъ разложиться и на тѣ силы, изъ которыхъ она можетъ быть составлена, то разсмотримъ, каковы должны быть силы, производящія то или другое движеніе твердаго тѣла и какія равнодѣйствующія даютъ онѣ въ каждомъ родѣ движенія. При этомъ ограничимся лишь случаями, необходимыми для рѣшенія нашего вопроса.

Въ поступательномъ движеніи тѣла всѣ частицы движутся одинаково и потому это движеніе произвдится параллельными силами, приложенными ко всѣмъ частицамъ тѣла, пропорціональными массамъ двигаемыхъ ими частицъ. Примѣромъ такихъ силъ можетъ служить тяжесть. Въ отсутствіи внѣшнихъ вліяній свободное паденіе тѣлъ происходитъ поступательно; для устраненія этихъ вліяній, лучше всего подвѣсить тѣло на нить и потомъ пережечь ее. Мысленно можно сложить

наго отвѣта; для повѣрки моихъ словъ предлагаю читателю (разумѣется не ученому спеціалисту) остановиться здѣсь и, не читая далѣе, разъяснить себѣ этотъ вопросъ.

такія силы въ одну равнодѣйствующую. Точка приложенія этой равнодѣйствующей называется центромъ массы; въ частномъ случаѣ, когда эти силы производятся тяжестью—центромъ тяжести.

Во вращательномъ движеніи около оси, проходящей черезъ центръ тяжести, частицы двигаются по окружностямъ около этой оси, и на діаметрально противоположныхъ сторонахъ этихъ окружностей имѣютъ равныя и прямо противоположныя скорости. Такое движеніе производится равными параллельно противоположными силами, иначе говоря, парами силъ, не дающими никакой равнодѣйствующей для поступательнаго движенія.

Въ поступательномъ движеніи, соединенномъ съ вращательнымъ около оси, перпендикулярной къ направленію поступательнаго движенія, частицы тѣла движутся не одинаково скоро: по одну сторону оси онѣ движутся быстрѣе, чѣмъ по другую. Соотвѣтственно этому и силы, производящія такое движеніе частицъ, должны быть сравнительно больше у частицъ съ большими скоростями, чѣмъ у частицъ съ меньшими. Поэтому и равнодѣйствующая этихъ силъ пройдетъ не черезъ центръ массы, а со стороны частицъ съ большими скоростями.

Отсюда непосредственно заключаемъ, что данная сила, проходящая черезъ центръ тяжести свободнаго твердаго тѣла, можетъ, а—при существующихъ условіяхъ должна,—распредѣлиться по всѣмъ частицамъ твердаго тѣла пропорціонально массамъ ихъ и, слѣдовательно, вызвать одно лишь поступательное движеніе этого тѣла.

Сила же, не проходящая черезъ центръ тяжести, можетъ разложиться по всѣмъ частицамъ тѣла лишь на силы, не пропорціональныя ихъ массамъ: частицы, лежащія по одну сторону съ точкой приложенія силы отъ центра массы, должны получить сравнительно бо́льшія слагаемыя силы, чѣмъ частицы по другую сторону центра массы; поэтому и движеніе тѣхъ и другихъ частицъ не можетъ быть одинаково; первыя частицы должны двигаться скорѣе вторыхъ, и потому къ общему поступательному движенію присоединится вращательное. Чѣмъ дальше точка приложенія силы отъ центра, тѣмъ неравномѣрнѣе распредѣляется сила между частицами тѣла, тѣмъ интенсивнѣе вращательное движеніе его, но тѣмъ больше и вращательный моментъ силы относительно центра. Все это согласно съ вышеприведеннымъ выводомъ.

III.

Теперь перейдемъ къ опредѣленію вліянія точки приложенія данной силы на количество возбуждаемой энергіи. Какъ извѣстно, интенсивность возбуждаемаго движенія зависитъ не только отъ величины силы, но и отъ протяженности пути, или отъ продолжительности времени ея дѣйствія. Самая маленькая сила можетъ сообщить тѣлу большую скорость, при достаточной продолжительности или на достаточномъ протяженіи пути ея дѣйствія. Наоборотъ, самая большая сила сообщитъ тому же тѣлу лишь неизмѣримо малую скорость въ продолженіе неизмѣримо малаго промежутка времени или на протяженіи неизмѣримо малаго пути. Моментальное же дѣйствіе силы, безъ всякаго перемѣщенія точки ея приложенія, совершенно невозможно. Поэтому продол-

жительность и протяженность дѣйствія силы составляютъ столь же необходимые факторы при опредѣленіи интенсивности возбуждаемаго движенія, какъ и ея величина. Но, какъ уже сказано, о нихъ рѣдко упоминается при изложеніи разсматриваемаго дѣйствія силы на твердое тѣло; обыкновенно молча подразумѣвается постоянство импульса данной силы, какъ силы мгновенной, дѣйствующей очень короткій, но опредѣленный промежутокъ времени. Протяженность пути дѣйствія такой силы, зависитъ главнымъ образомъ отъ двигаемой массы. Для поясненія положимъ, что данная сила дѣйствуетъ, въ теченіе одинаковыхъ промежутковъ времени, на разныя массы: одинъ разъ на массу m_1, другой разъ на массу m_2, въ n разъ меньшую чѣмъ m_1. Вслѣдствіе этого и скорость v_2 и перемѣщеніе s_2, сообщаемыя второй массѣ m_2, должны быть въ n разъ больше скорости v_1 и перемѣщенія s_1, сообщаемыхъ первой массѣ m_1, въ теченіе такого же промежутка времени τ. Поэтому и работа силы во второмъ случаѣ на протяженіи s_2 будетъ въ n разъ больше, чѣмъ въ первомъ случаѣ на протяженіи s_1. Соотвѣтственно этому и кинетическая энергія, численно равная затраченной работѣ, должна быть во второмъ случаѣ въ n разъ больше, чѣмъ въ первомъ. То же слѣдуетъ и изъ выраженія энергіи, пропорціональной массѣ и квадрату скорости (mv^2); отъ уменьшенія массы въ n разъ энергія движенія во второмъ случаѣ должна уменьшиться въ n же разъ, но отъ увеличенія скорости въ n разъ, она должна увеличиться въ n^2 разъ и, слѣдовательно, въ общемъ должна возрасти въ n разъ. Такимъ образомъ одна и та же сила въ теченіе одинаковыхъ промежутковъ времени можетъ произвести различную работу, произвести различное количество энергіи, въ зависимости отъ условій движенія.

Этотъ выводъ можно наглядно иллюстрировать опытомъ на атвудовой машинѣ, заставляя дѣйствовать одинъ и тотъ же перегрузокъ, въ теченіи одинаковыхъ промежутковъ времени, одинъ разъ на данную пару гирекъ и колесо, другой разъ на гирьки въ n разъ меньшія и колесо въ n разъ болѣе тонкое.

Сходное явленіе происходитъ и при дѣйствіи силы на разныя точки свободнаго твердаго тѣла. Если сила проходитъ черезъ центръ тяжести, то, распредѣляясь равномѣрно на всѣ части, она дѣйствуетъ какъ бы на все тѣло заразъ. Если же сила проходитъ въ сторонѣ отъ центра, то она дѣйствуетъ преимущественно на части тѣла въ этой сторонѣ, какъ бы на меньшую массу; этой части тѣла она сообщаетъ и бóльшее перемѣщеніе и бóльшую скорость, а потому сама дѣйствуетъ на бóльшемъ протяженіи, производитъ бóльшую работу и соотвѣтственно этому сообщаетъ бóльшую энергію.

Конечно, увеличеніе скорости въ сторонѣ тѣла, гдѣ точка приложенія силы, происходитъ на счетъ уменьшенія скоростей частицъ въ сторонѣ, противоположной отъ центра, гдѣ частицамъ достаются меньшія составныя части разлагаемой данной силы. Но все таки общее количество кинетической энергіи всѣхъ частицъ въ этомъ случаѣ больше, чѣмъ въ случаѣ одинаковыхъ скоростей ихъ, при центральномъ дѣйствіи силы. Для подтвержденія возьмемъ двѣ равныя массы m на равныхъ разстояніяхъ отъ центра, на прямой, проходящей черезъ него перпендикулярно къ направленію силы и къ оси вращенія. Если по-

ступательная скорость центра равна v, то линейная скорость массы со стороны силы равна $v+w$, со стороны противоположной $v-w$. Количество движенія обѣихъ массъ равно

$$m(v+w)+m(v-w)=2mv,$$

т. е. то же, что и при поступательномъ движеніи тѣла со скоростью центра. Кинетическая же энергія равна

$$\frac{1}{2}m(v+w)^2+\frac{1}{2}m(v-w)^2=mv^2+mw^2,$$

т. е. больше энергіи поступательнаго движенія mv^2 на энергію движенія обѣихъ массъ вокругъ центра mw^2.

IV.

Для поясненія всего изложеннаго разсмотримъ въ подробности дѣйствіе силы въ простѣйшемъ случаѣ: на воображаемое тѣло, состоящее изъ двухъ матеріальныхъ точекъ съ массами m_1 и m_2, соединенныхъ неизмѣняемой нематеріальной прямой L. Центръ массы такого тѣла находится на прямой L, въ точкѣ 0, на разстояніяхъ r_1 и r_2 отъ массъ m_1 и m_2. Такъ какъ центръ массы, по опредѣленію, есть точка приложенія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ, приложенныхъ ко всѣмъ массамъ и пропорціональныхъ имъ, то

$$r_1:r_2=m_2:m_1;$$

отсюда

$$(r_1+r_2):r_2=(m_1+m_2):m_1$$

и точно такъ-же

$$(r_2+r_1):r_1=(m_2+m_1):m_2.$$

Такъ какъ $r_1+r_2=L$, а $m_1+m_2=M$—массѣ всего тѣла, то

$$m_1=M.r_2:L \text{ и } m_2=M.r_1:L.$$

На эту то систему и дѣйствуетъ данная сила F. Если она приложена къ центру 0, то она разлагается по массамъ m_1 и m_2 на параллельныя составляющія силы f_1 и f_2 по пропорціи

$$f_1:f_2=r_2:r_1=m_1:m_2.$$

Вслѣдствіе пропорціональности силъ f_1 и f_2 массамъ m_1 и m_2, сообщаемыя ими ускоренія a_1 и a_2 равны между собой; именно:

$$a_1=a_2=f_1:m_1=f_2:m_2=(f_1+f_2):(m_1+m_2)=F:M.$$

Вслѣдствіе этого сила F сообщитъ обѣимъ массамъ, въ теченіи τ секундъ, равныя скорости:

$$v=a.\tau=(F:M).\tau$$

и равныя перемѣщенія:

$$s=\frac{1}{2}a.\tau^2=\frac{1}{2}.(F:M).\tau^2.$$

Слѣдовательно движеніе системы будетъ поступательное. Общее количество движенія равно

$$m_1.v + m_2.v = M.v = M.(F:M).\tau = F.\tau,$$

т. е. равно импульсу силы.

Кинетическая энергія системы равна

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2).v^2 = \frac{1}{2}M.(a\tau)^2 = M.s.a.$$

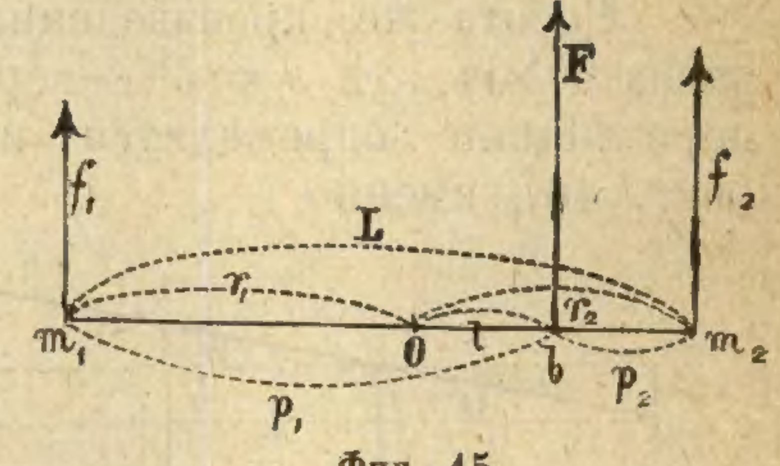
Такъ какъ $a = F:M$, то

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2).v^2 = F.s,$$

т. е. равно работѣ силы F. Значитъ всѣ величины таковы, какъ будто бы сила F дѣйствовала непосредственно на массы m_1 и m_2, сосредоточенныя въ центрѣ O.

Если сила F приложена не къ центру O, а въ точкѣ b на прямой L, на разстояніяхъ p_1 и p_2 отъ массъ m_1 и m_2 (фиг. 45), то она разложится по массамъ m_1 и m_2 на другія слагаемыя силы f_1 и f_2 по закону

$$f_1:f_2 = p_2:p_1.$$



Фиг. 45.

Отсюда

$$f_1:(f_1 + f_2) = p_2:(p_1 + p_2);$$

такъ какъ

$$f_1 + f_2 = F \text{ и } p_1 + p_2 = L,$$

то

$$f_1 = F.p_2:L \text{ и } f_2 = F.p_1:L.$$

Поэтому ускоренія a_1 и a_2 массъ m_1 и m_2 будутъ

$$a_1 = f_1:m_1 = (F.p_2:L):(M.r_2:L),$$

или

$$a_1 = (F:M).(p_2:r_2) \text{ и } a_2 = (F:M).(p_1:r_1).$$

Этими прибавочными множителями $(p:r)$ отличаются ускоренія въ разсматриваемомъ случаѣ отъ предыдущаго; при $p = r$ получимъ прежнія ускоренія. Отсюда найдемъ пріобрѣтенныя скорости и перемѣщенія массъ въ теченіи того же промежутка τ:

$$v_1 = a_1\tau \text{ и } v_2 = a_2\tau,$$

$$s_1 = \frac{1}{2}\,a_1\tau^2 \text{ и } s_2 = \frac{1}{2}\,a_2\tau_2.$$

По скоростямъ найдемъ количества движенія

$$m_1v_1 = (M.r_2:L).(F:M).(p_2:r_2).\tau,$$

или

$$m_1v_1 = (F:L).p_2.\tau$$

и точно такъ же

$$m_2v_2 = (F:L).p_1.\tau.$$

Сумма ихъ равна

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (F:L)(p_1 + p_2).\tau = (F:L) \times L.\tau = F.\tau,$$

т. е. тому же импульсу силы, какъ и прежде, чего и слѣдовало ожидать. Живая сила массъ будетъ

$$^1/_2\, m_1v_1^2 = {}^1/_2.(M.r_2:L) \times (F.p_2.\tau:Mr_2)^2,$$

или, по сокращеніи,

$$^1/_2\, m_1v_1^2 = {}^1/_2\, (F^2.\tau^2:ML).(p_2^2:r_2);$$

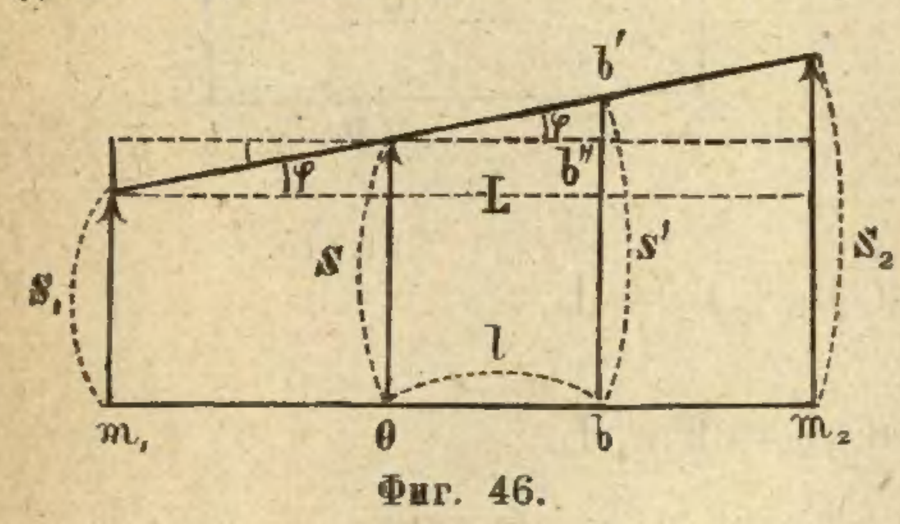
аналогично

$$^1/_2\, m_2v_2^2 = {}^1/_2\, (F^2\tau^2:ML).(p_1^2:r_1).$$

Поэтому вся энергія системы равна

$$^1/_2 m_1v_1^2 + {}^1/_2\, m_2v_2^2 = {}^1/_2\, (F^2\tau^2:LM)(p_1^2:r_1 + p_2^2:r_2).$$

Работа же, произведенная силою F во время τ, въ этомъ случаѣ, равна $F \times s'$, гдѣ $s' = bb'$—перемѣщенію точки приложенія силы b. Это перемѣщеніе опредѣлится изъ перемѣщеній s_1 и s_2 массъ m_1 и m_2 (фиг. 46); именно



Фиг. 46.

$$s' = s_1 + \sigma' = s_1 + (s_2 - s_1).(p_1:L)$$

такъ какъ $L = p_1 + p_2$, то

$$s' = (s_1.p_1 + s_1p_2 + s_2p_1 - s_1p_1):L = \\ =(s_1p_2 + s_2p_1):L.$$

Выражая величины s_1 и s_2 черезъ ихъ ускоренія a_1 и a_2, получимъ:

$$s' = {}^1/_2\, (F:M).\tau^2[(p_2:r_2)p_2 + (p_1:r_1).p_1]:L.$$

Умножая s' на F, получимъ искомую работу

$$F.s' = {}^1/_2\, (F^2:M)\tau^2(p_1^2:r_1 + p_2^2:r_2):L,$$

т. е. работа силы равна возбужденной живой силѣ системы, чего и слѣдовало ожидать.

Примемъ теперь это движеніе системы за сложное изъ поступательнаго съ центромъ 0 и вращательнаго около этого центра.

Поступательное движеніе т. е. перемѣщеніе центра $00' = s$, опредѣлится изъ полныхъ перемѣщеній массъ s_1 и s_2 (фиг. 46), совершенно аналогично перемѣщенію s' точки b, именно

$$s = s_1 + (s_2 - s_1).(r_1:L).$$

Такъ какъ $L = r_1 + r_2$, то

$$s = (s_1.r_1 + s_1.r_2 + s_2r_1 - s_1r_1):L = (s_1.r_2 + s_2.r_1):L.$$

Вставляя значенія s_1 и s_2 по ускореніямъ a_1 и a_2, получимъ:

$$s = {}^1/_2\, (F:M).\tau^2[(p_2:r_2).r_2 + (p_1:r_1).r_1]:L.$$

Такъ какъ $L = p_1 + p_2$, то

$$s = \frac{1}{2}(F:M).\tau^2.(p_1 + p_2):L = \frac{1}{2}(F:M)\tau^2,$$

т. е. перемѣщеніе центра массъ то же самое, какъ и въ случаѣ дѣйствія силы непосредственно на центръ. Значитъ и работа силы, расходуемая на поступательное движеніе, а также и перемѣщенія массъ m_1 и m_2, ихъ ускоренія и скорости, а слѣдовательно и живыя силы въ этомъ движеніи такія же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

Вращательное движеніе опредѣлимъ по угловому ускоренію α, и перемѣщенію φ въ тотъ же промежутокъ времени τ; именно

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha\tau^2;$$

но

$$\varphi = (s_2 - s_1):L = \frac{1}{2}(F:M)\tau^2(p_1:r_1 - p_2:r_2):L.$$

Положимъ, что точка приложенія силы b находится на разстояніи l отъ центра 0, тогда

$$p_1 = r_1 + l \text{ и } p_2 = r_2 - l.$$

Поэтому послѣдній множитель въ выраженіи φ равенъ

$$[(r_1 + l):r_1 - (r_2 - l):r_2]:L = (l:r_1 + l:r_2):(r_1 + r_2) = l:r_1r_2.$$

Сравнивая обѣ величины φ, получимъ угловое ускореніе

$$\alpha = (F:M) \times l:r_1r_2 = Fl:(M.r_1r_2).$$

По α найдемъ линейное перемѣщеніе $\sigma = b'b''$ точки приложенія силы F во вращательномъ движеніи системы; именно

$$\sigma = \varphi.l = \frac{1}{2}\alpha\tau^2 l.$$

Поэтому работа силы, расходуемая на вращательное движеніе, равна

$$F.\sigma = \frac{1}{2}(F.l.\tau)^2:M.r_1r_2.$$

По α найдемъ линейныя скорости вращенія массъ m_1 и m_2, именно

$$w_1 = \alpha.r_1\tau \text{ и } w_2 = \alpha r_2\tau,$$

а по нимъ и энергію системы E:

$$E = \frac{1}{2} m_1w_1^2 + \frac{1}{2} m_2w_2^2 = \frac{1}{2}\alpha^2\tau^2[m_1r_1^2 + m_2r_2^2],$$

или

$$E = \frac{1}{2}(Fl:M.r_1r_2)^2\tau^2.M(r_2r_1^2 + r_1r_2^2):L;$$

$$E = \frac{1}{2}(F.l.\tau.)^2:M.r_1r_2(r_1 + r_2):L.$$

Такъ какъ $L = r_1 + r_2$, то энергія вращательнаго движенія

$$E = \frac{1}{2}(Fl\tau)^2:Mr_1r_2,$$

т. е. равна работѣ силы, производящей вращательное движенiе, что и требовалось доказать.

Приведенныя вычисленiя нѣсколько сложны; вѣроятно ихъ можно упростить; я не особенно объ этомъ заботился, имѣя въ виду лишь главную цѣль: выясненiе разсматриваемаго явленiя съ механической точки зрѣнiя.

Проф. *П. Фанъ-деръ-Флитъ* (Спб.).

СОХРАНЕНIЕ и ПРЕВРАТИМОСТЬ ЭНЕРГIИ.

(Окончанiе).*

II. Магнитныя дѣйствiя тока.

§ 96. Гальваническiй токъ образуетъ вокругъ себя магнитное поле. Замкнутая цѣпь, по которой идетъ токъ, подобна магнитному слою, котораго сѣверная сторона находится на лѣвой сторонѣ тока, а южная— на правой. Онъ можетъ вызыватъ магнитизмъ въ кускахъ желѣза и стали, можетъ приводить въ движенiе магниты и подвижные проводники, по которымъ идетъ токъ, можетъ вызывать токи въ другихъ замкнутыхъ проводникахъ. На всѣ эти дѣйствiя тратится часть энергiи тока.

Если токъ не производитъ никакой внѣшней работы, вся энергiя его превращается въ теплоту. Если же токъ производитъ еще какую нибудь внѣшнюю работу—а въ этихъ случаяхъ онъ дѣйствуетъ всегда, какъ нѣкоторая магнитная сила,— то энергiя его только частью превращается въ теплоту, а другая часть идетъ на произведенiе внѣшней работы. Примѣняя къ этому случаю законъ сохраненiя энергiи, мы получимъ, что количество работы, производимой токомъ въ 1 сек., или, что то же, трата энергiи тока въ 1 сек. равна суммѣ внѣшней работы и количества тепла, развиваемаго въ цѣпи въ 1 сек., выраженнаго въ механическихъ единицахъ:

$$J^2R = Q + T.$$

Здѣсь J—сила тока, которая установилась бы въ данной цѣпи, если бы не было внѣшней работы; Q—количество тепла въ механическихъ единицахъ (килограммометрахъ или эргахъ); T—работа электромагнитной силы тока. Когда производится внѣшняя работа, то сила тока не можетъ быть равна J, потому что тогда Q равнялось бы J^2R (§ 88). Сила тока должна уменьшиться. Обозначимъ ее черезъ i. По предыдущему $Q = i^2R$. Подставляя въ предыдущее уравненiе, получимъ

$$J^2R = i^2R + T. \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

*) См. „В. О. Ф.“ №№ 217, 218, 219, 220, 221, 222 и 223.

Если сила тока стала i, она соотвѣтствуетъ, по закону Ома, электровозбудительной силѣ iR, обозначимъ ее черезъ $e <$ E. Электровозбудительная сила цѣпи какъ бы уменьшилась на величину E—e, или въ цѣпи, какъ будто, появилась другая электровозбудительная сила, противодѣйствующая электровозбудительной силѣ батареи. Если T отрицательно, т. е. какая либо внѣшняя сила производитъ положительную работу, преодолѣвая сопротивленіе магнитной силы даннаго тока, то $i^2R > J^2R$ и, слѣдовательно, $i > J$; поэтому и $e > E$, — электовозбудительная сила увеличивается и въ цѣпи, какъ будто, создается электровозбудительная сила въ ту же сторону, куда дѣйствуетъ электровозбудительная сила батареи.

Эти заключенія мы сдѣлали на основаніи закона сохраненія энергіи. Если мы теперь объяснимъ возникновеніе этихъ электровозбудительныхъ силъ во всѣхъ случаяхъ внѣшнихъ дѣйствій тока на основаніи другихъ извѣстныхъ намъ законовъ, то мы получимъ косвенное подтвержденіе того, что превращенія энергіи тока подчиняются закону сохраненія энергіи.

§ 97. Пусть SN (фиг. 47) представляетъ кусокъ мягкаго желѣза, который намагничивается дѣйствіемъ тока MP. Пока происходитъ намагничиваніе, магнитная сила тока производитъ положительную работу. Это, по предыдущему, должно создавать въ проводникѣ MP электровозбудительную силу, противоположную электровозбудительной силѣ батареи. Въ самомъ дѣлѣ, въ кускѣ желѣза возбуждается магнитизмъ, и если токъ идетъ, какъ показано стрѣлкой, т. е. по стрѣлкѣ часовъ, то къ намъ будетъ обращенъ южный полюсъ магнита, и слѣд., амперовы токи въ магнитѣ будутъ одного направленія съ токомъ MP. Возбужденіе и затѣмъ усиленіе магнитизма въ кускѣ желѣза возбуждаетъ въ проводникѣ MP индуктивный токъ, т. е. создаетъ электровозбудительную силу въ направленіи, обратномъ амперовымъ токамъ магнита, а слѣдовательно и току MP. Этотъ послѣдній токъ ослабляется. Такимъ образомъ, согласно уравненію (7), часть всей энергіи тока J^2R идетъ на работу T намагничиванія куска желѣза, а остальная часть, i^2R, появляется въ видѣ теплоты.

Фиг. 47.

Когда токъ батареи прекращается, кусокъ желѣза размагничивается. Исчезновеніе магнитизма въ немъ возбуждаетъ въ проводникѣ MP индуктивный токъ одного направленія съ исчезающими амперовыми токами магнита. Слѣд. въ проводникѣ MP возникаетъ электровозбудительная сила одного направленія съ электровозбудительной силой батареи, усиливающая токъ. Магнитная сила тока производитъ отрицательную работу, потому что она сопротивляется размагничиванію желѣза. И здѣсь, согласно ур-нію (7), въ которомъ T отрицательно, электрическая энергія тока J^2R увеличивается на эквивалентъ исчезающей магнитной энергіи T куска желѣза и создается энергія тока $i^2R > J^2R$, которая превращается въ теплоту.

Исчезающая магнитная энергія возстановляетъ здѣсь то же количество энергіи тока, какое раньше было потрачено на возбужденіе магнитизма.

§ 98. Если бы вмѣсто куска желѣза былъ кусокъ стали, то въ первой фазѣ процесса, при намагничиваніи, разница была бы только во времени. Во все время намагничиванія Т было бы положительно и въ цѣпи существовала бы электровозбудительная сила, противоположная силѣ батареи. Часть энергіи тока превращалась бы въ магнитную энергію. Если токъ прервать, то магнитизмъ не исчезнетъ въ кускѣ стали, а только немного ослабится; это ослабленіе создаетъ очень незначительную электровозбудительную силу одного направленія съ силой батареи; токъ MP очень немного усилится, и такимъ образомъ возстановится незначительная часть той энергіи тока, какая раньше была потрачена на возбужденіе магнитизма. Энергія получившагося магнита представляетъ эквивалентъ потраченной энергіи тока.

Если бы мы, не прекращая тока, удалили кусокъ намагниченной стали, то это удаленіе вызвало бы въ проводникѣ MP наведенный токъ одного направленія съ амперовыми токами магнита и, слѣд., произвело бы электровозбудительную силу одного направленія съ силой батареи. Это породило бы такое же количество энергіи тока, какъ если бы магнитизмъ былъ уничтоженъ въ стали, т. е. такое же, какое было потрачено на возбужденіе магнитизма. Такимъ образомъ въ результатѣ никакой траты электрической энергіи не произошло. Энергія полученнаго магнита представляетъ эквивалентъ уже не электрической энергіи тока, а работы внѣшней силы, удалявшей магнитъ. Магнитная сила между магнитомъ и токомъ произвела отрицательную работу, потому что направленіе тока совпадаетъ съ амперовыми токами магнита, а потому магнитъ и токъ притягивались. Слѣдовательно, удаляя магнитъ отъ тока, внѣшняя сила должна была преодолѣвать сопротивленіе притяженія между ними и произвести положительную работу. Эта работа и послужила источникомъ магнитной энергіи.

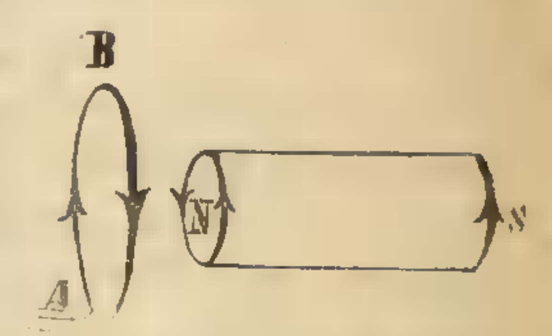
§ 99. При всякомъ относительномъ перемѣщеніи двухъ токовъ, или тока и магнита, магнитная сила, дѣйствующая между ними, производитъ положительную или отрицательную работу, смотря по тому, происходитъ ли движеніе въ ту сторону, куда дѣйствуетъ сила, или въ сторону противоположную. Изъ ур-нія (7) по предыдущему заключаемъ, что въ 1-мъ случаѣ въ проводникахъ, по которымъ идутъ токи, должны возникать электровозбудительныя силы, противоположныя электровозбудительнымъ силамъ батарей, слѣд., ослабляющія токи, во 2-мъ — силы одного направленія съ послѣдними, слѣд. усиливающія токи. Справедливость такого заключенія вытекаетъ изъ закона Ленца. Въ самомъ дѣлѣ, по закону Ленца при всякомъ относительномъ перемѣщеніи замкнутаго проводника и тока или магнита, въ первомъ возникаетъ токъ, противодѣйствующій тому движенію, которое его производитъ. Другими словами, электромагнитныя силы индуктивныхъ токовъ, возбуждаемыхъ передвиженіемъ, всегда производятъ отрицательную работу. Значитъ, если токъ батареи производитъ отрицательную внѣшнюю работу, то онъ имѣетъ то же направленіе, какъ и токъ, индуктируемый въ томъ же проводникѣ передвиженіемъ; слѣд. послѣдній усиливаетъ токъ батареи. Если же токъ батареи производитъ положительную внѣшнюю работу, то направленіе его противоположно току, наводимому въ томъ же проводникѣ передвиженіемъ, и послѣдній ослабляетъ токъ батареи. А это и значитъ, что въ проволокѣ, по которой идетъ главный токъ, возни-

каютъ электровозбудительныя силы въ первомъ случаѣ одного направленія съ силой батареи, усиливающая главный токъ, во второмъ—противоположнаго направленія, ослабляющая главный токъ, ч. и т. д.

Разсмотримъ нѣсколько частныхъ случаевъ:

a) Положимъ, что въ двухъ параллельныхъ проволокахъ идутъ токи по одному направленію. Эти проволоки притягиваются. Если ихъ сближать, то дѣйствующая между ними сила производитъ положительную работу; вмѣстѣ съ тѣмъ каждый токъ возбуждаетъ въ проводникѣ другого тока индуктивный токъ, обратный своему направленію, а слѣд., и направленію того другого тока. Силы обоихъ токовъ ослабляются. Если проволоки удалять другъ отъ друга, то дѣйствующая между ними сила производитъ отрицательную работу; вмѣстѣ съ тѣмъ каждый токъ наводитъ въ проволокѣ другого токъ одного направленія съ собой, а, слѣдовательно, и съ другимъ токомъ. Слѣд. въ обоихъ проводникахъ возникаютъ электровозбудительныя силы одного направленія съ силами батарей, и оба тока усиливаются на счетъ работы внѣшней силы.

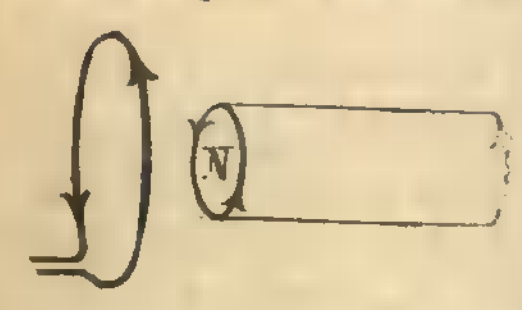
b) Положимъ, что въ проводникѣ AB (фиг. 48) токъ идетъ по направленію, обратному амперовымъ токамъ магнита NS. Такой токъ отталкивается магнитомъ. Если проводникъ и магнитъ сближать, дѣйствующая между ними магнитная сила произведетъ отрицательную работу; вмѣстѣ съ тѣмъ въ проводникѣ возбудится индуктивный токъ, обратный амперовымъ токамъ магнита, и, слѣдовательно, одного направленія съ токомъ AB. Токъ батареи усилится.



Фиг. 48.

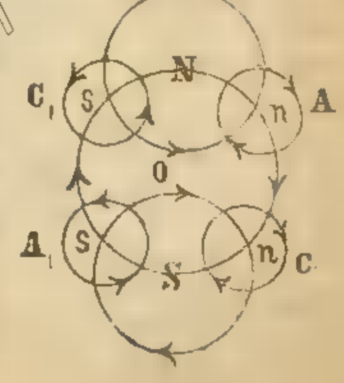
Если проводникъ AB удалять отъ магнита, дѣйствующая между ними сила произведетъ положительную работу; въ то же время въ проводникѣ наведется токъ одного направленія съ амперовыми токами магнита, и, слѣд., обратный току AB. Въ проводникѣ AB возникнетъ электровозбудительная сила, противоположная силѣ батареи, и токъ ослабнетъ. Часть его энергіи потратится на внѣшнюю работу.

c) Если въ проводникѣ AB токъ идетъ по одному направленію съ амперовыми таками магнита NS (фиг. 49), то токъ притягивается къ магниту. Поэтому, когда токъ приближается къ магниту, дѣйствующая между ними магнитная сила производитъ положительную работу, когда удаляется—отрицательную. Въ 1-мъ случаѣ въ проводникѣ наводится токъ, обратный амперовымъ токамъ магнита, а, слѣдовательно, и току въ проводникѣ, во 2-мъ—одного направленія. Въ 1-мъ случаѣ токъ батареи ослабляется, во 2-мъ—усиливается.



Фиг. 49.

d) Пусть N,S представляютъ обращенные къ намъ концы подковообразнаго магнита а *n* и *s*—сѣченія якоря электромагнитнаго двигателя (фиг. 50). Направленія амперовыхъ токовъ въ магнитѣ и тока въ обмоткахъ якоря обозначены стрѣлками. При движеніи якоря изъ положенія AA_1 до положенія CC_1 магнитная сила производитъ положительную работу. Когда якорь проходитъ передъ полюсами магнита, токъ въ первомъ мѣняется на обратный и въ положеніи AA′ снова получимъ южный полюсъ въ точкѣ A_1 и сѣ-



Фиг. 50.

верный въ A. Такимъ образомъ, во все время дѣйствія прибора магнитная сила тока производитъ положительную работу. Это должно ослаблять силу тока въ якорѣ. И въ самомъ дѣлѣ, при движеніи полюса *n* изъ положенія A въ положеніе C, въ обмоткѣ электромагнита обоими полюсами N и S наводится токъ одного направленія съ амперовыми токами полюса N, отъ котораго полюсъ *n* удаляется, и противоположнаго токамъ полюса S, къ которому онъ приближается. Этотъ наведенный токъ, какъ не трудно усмотрѣть изъ чертежа, противоположенъ току батареи. Слѣд. въ обмоткѣ *n* создается электровозбудительная сила, противоположная силѣ батареи, и токъ ослабляется. То же самое и съ полюсомъ *s*: и въ этой обмоткѣ дѣйствіе обоихъ полюсовъ S и N наводитъ токъ, противоположный току батареи и, слѣд., ослабляющій его.

III. Индуктивные токи.

§ 100. Электромагнитная сила, дѣйствующая между индуктивнымъ токомъ, возбуждаемымъ относительнымъ перемѣщеніемъ, и индуктирующимъ токомъ или магнитомъ, производитъ всегда отрицательную работу (зак. Ленца). Положимъ, что индуктивный токъ возбуждается относительнымъ перемѣщеніемъ замкнутаго проводника и тока. Чтобы примѣнить къ этому случаю ур-ніе (7), надо замѣтить, что внѣшняя работа T состоитъ здѣсь изъ двухъ частей: изъ положительной работы возбужденія индуктивнаго тока и отрицательной работы силы взаимодѣйствія между наведеннымъ и наводящимъ токами. Если обозначимъ силу наведеннаго тока черезъ i', а сопротивленіе проводника, въ которомъ наводится токъ черезъ R', то энергія его выразится черезъ i'^2R'. Отрицательную работу электромагнитной силы между токами обозначимъ чезезъ T'; тогда $+T'$ будетъ представлять работу внѣшней силы, производящей перемѣщеніе. Тогда

$$T = i'^2R' - T' \text{ и } J^2R = i^2R \mp i'^2R' - T',$$

откуда

$$J^2R + T' = i^2R + i'^2R'.$$

Полная электрическая энергія, превращающаяся въ теплоту, какъ въ главной цѣпи, такъ и въ индукціонной, $i^2R + i'^2R'$, равна суммѣ энергіи батареи J^2R и работы внѣшней силы T'. Весь процессъ представляетъ превращеніе химической энергіи батареи и работы внѣшней силы въ электрическую энергію токовъ и этой послѣдней въ теплоту.

При наведеніи тока относительнымъ перемѣщеніемъ магнита и замкнутаго проводника, энергія индуктивнаго тока есть эквивалентъ работы внѣшней силы; то же будетъ въ случаѣ, когда магнитъ замѣщается электромагнитомъ, намагничиваемымъ самимъ индуктивнымъ токомъ, какъ это бываетъ въ динамо-машинахъ.

§ 101. При возбужденіи токовъ замыканіемъ и размыканіемъ никакая внѣшняя сила не производитъ работы. Примѣняя къ этому случаю ур-ніе (7), мы подъ T должны разумѣть работу возбужденія индуктивнаго тока. Она равна, по предыдущему, $i'^2R'^2$. Ур-ніе (7) приметъ видъ:

$$J^2R = i^2R + i'^2R'.$$

Называя черезъ E и E′ электровозбудительныя силы батареи и наведеннаго тока и замѣняя, согласно закону Ома, JR черезъ E и $i'R'$ черезъ E′, получимъ

$$JE = i^2R + i'E';$$

i^2R не можетъ быть равно нулю, потому что это значило бы, что $i=0$, т. е. что индуктирующій токъ совсѣмъ прекратился; но тогда не могло бы быть и индуктивнаго тока. Поэтому $i'E' < JE$ и если $E' > E$, то $i' < J$. Въ спирали Румкорфа электровозбудительная сила индуктивнаго тока гораздо больше электровозбудительной силы индуктирующаго, поэтому сила перваго меньше силы втораго. Поэтому, не смотря на наибольшую электровозбудительную силу индуктивныхъ токовъ этихъ спиралей, ими нельзя пользоваться тамъ, гдѣ нужна значительная сила тока, напр. при электрическомъ освѣщеніи.

§ 102. *Превратимость энергіи тока.* Законъ сохраненія энергіи въ примѣненіи къ превращеніямъ энергіи тока выражается уравненіемъ: $J^2R = i^2R + T$, показывающимъ, что количество развиваемой токомъ электрической энергіи J^2R равно суммѣ количества тепла i^2R, развиваемаго внутри цѣпи, и количества внѣшней работы T. Только для такого истолкованія этого ур-нія нужно, чтобы всѣ эти количества были выражены въ одинаковыхъ единицахъ. Если же эти количества измѣрены въ обычныхъ единицахъ, то чтобы вставить ихъ въ равенство, надо помножить ихъ на соотвѣтствующіе эквиваленты. Если количество тепла равно Q кал., а внѣшняя работа равна L килограммометрамъ, то чтобы представить это равенство въ Джауляхъ, надо помножить Q на 42,5 (принимая 98 за 100), а L—на 10 (точнѣе на 9,8). Такъ что $J^2R = 42{,}5Q + 10L$. Если $L = 0$, т. е. никакой внѣшней работы не производится, то вся энергія тока превращается въ теплоту. Но ни въ какой другой родъ энергіи такого полнаго превращенія произойти не можетъ. Для этого нужно было бы, чтобы $i^2R = 0$, слѣд. $i = 0$, т. е., чтобы токъ совсѣмъ прекратился; но тогда не было бы и никакихъ дѣйствій тока, ни магнитныхъ, ни химическихъ, а слѣд. не было бы превращенія. Итакъ, при всѣхъ превращеніяхъ энергіи тока въ магнитную, химическую, кинетическую и посредствомъ этихъ въ другія, всегда часть энергіи тока превращается въ теплоту.

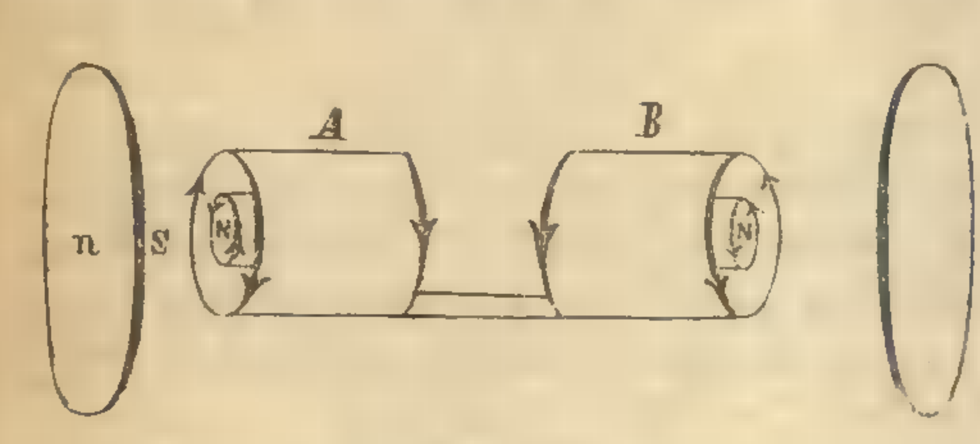
§ 103. *Электрическая передача работы.* Якорь динамо-машины представляетъ замкнутый проводникъ, поддерживаемый въ постоянномъ движеніи вблизи электромагнита. Это вызываетъ въ обмоткѣ якоря непрерывный индуктивный токъ. Энергія индуктивнаго тока представляетъ, какъ было сказано (§ 100), эквивалентъ работы силы, движущей якорь вопреки электромагнитной силѣ, дѣйствующей между индуктивнымъ токомъ и элактромагнитомъ. Если этотъ токъ пропустить въ обмотку якоря электромагнитнаго двигателя, послѣдній прійдетъ въ движеніе и можетъ произвести ту или другую работу, если соединить его ось съ какой либо машиной. Такимъ образомъ, затрачивая въ одномъ мѣстѣ работу механической силы, можно получить ее въ другомъ мѣстѣ. Это называется *электрической передачей работы на разстояніе.* Однако

изъ того, что было сказано о превратимости энергіи тока въ работу, ясно, что передать можно только часть затрачиваемой работы; другая неизбѣжно превращается въ теплоту вслѣдствіе тренія частей машинъ и движенія тока по проводамъ. Чѣмъ дальше надо передать работу, тѣмъ большая часть затрачиваемой работы превращается въ теплоту и тѣмъ меньше передается.

Токами динамо-машинъ можно пользоваться не только для электрической передачи работы, но и для освѣщенія, химическаго разложенія, нагрѣванія, намагничиванія, словомъ—для всѣхъ дѣйствій, какія можетъ производить токъ.

Въ качествѣ источника механической силы, поддерживающей движеніе якоря динамо-машины, можно пользоваться кинетической энергіей вѣтровъ и воды, вѣсовой энергіей воды, работой паровыхъ машинъ, наконецъ—энергіей морскихъ приливовъ, т. е. въ сущности кинетической энергіей вращательнаго движенія земли, и такимъ образомъ превращать эти роды энергіи черезъ посредство энергіи тока во всѣ другіе.

§ 104. *Телефонъ.* Телефонъ есть приборъ для электрической передачи звуковой энергіи. Пусть А (фиг. 51) представляетъ телефонъ станціи отправленія В — телефонъ станціи полученія. Звуковыя колебанія желѣзной пластинки то приближаютъ ее къ магниту, то удаляютъ отъ него. При приближеніи пластинки къ магниту магнитизмъ въ немъ усиливается. Это возбуждаетъ въ катушкѣ токъ, обратный амперовымъ токамъ магнита, какъ отмѣчено на чертежѣ стрѣлками. Электромагнитная сила, съ которой индуктивный токъ дѣйствуетъ на магнитъ, производитъ отрицательную работу, такъ какъ она сопротивляется усиленію магнита, стремясь возбудить въ N южный полюсъ (токъ въ обмоткѣ идетъ здѣсь по стрѣлкѣ часовъ). Пластинка подъ дѣйствіемъ магнита превращается въ магнитный слой, обращенный къ магниту южной стороной; катушка же представляетъ соленоидъ, обращенный южнымъ концомъ къ пластинкѣ и, слѣд., отталкивающій ее. Поэтому электромагнитная сила, дѣйствующая между пластинкой и катушкой, производитъ также отрицательную работу, противодѣйствуя силѣ звукового колебанія пластинки. Когда пластинка удаляется отъ магнита, магнитизмъ въ немъ ослабляется. Это наводитъ въ катушкѣ токъ одного направленія съ амперовыми токами магнита. Электромагнитная сила, съ которой токъ дѣйствуетъ на магнитъ, производитъ отрицательную работу, такъ какъ она противодѣйствуетъ ослабленію магнита, стремясь возбудить въ N одноименный полюсъ (токъ въ обмоткѣ идетъ теперь противъ стрѣлки часовъ). Электромагнитная сила между пластинкой и катушкой производитъ также отрицательную работу, сопротивляясь удаленію пластинки, производимому силой звукового колебанія ея.



Фиг. 51.

Концы проволоки телефона А соединены съ концами проволоки такого же телефона на станціи В. Когда токъ идетъ въ катушкѣ В,

какъ указано стрѣлками, онъ усиливаетъ магнитизмъ въ магнитѣ; пластинка сильнѣе притягивается магнитомъ и подается въ его сторону. Катушка представляетъ при этомъ соленоидъ, обращенный къ пластинкѣ сѣвернымъ полюсомъ, какъ и магнитъ, пластинка же представляетъ магнитный слой, обращенный къ магниту южной стороной. Поэтому электромагнитныя силы, съ которыми токъ дѣйствуетъ на магнитъ и на пластинку, производятъ положительную работу, преодолѣвая сопротивленіе силы звукового колебанія пластинки. (Будемъ для краткости называть такъ равнодѣйствующую силъ упругости и инерціи пластинки). Когда направленіе тока мѣняется, онъ ослабляетъ магнитизмъ въ магнитѣ, и пластинка начинаетъ удаляться. Катушка представляетъ теперь соленоидъ, обращенный къ пластинкѣ южнымъ полюсомъ. Поэтому электромагнитныя силы, съ которыми токъ дѣйствуетъ на магнитъ и на пластинку, производятъ положительную работу, преодолѣвая сопротивленіе силы звукового колебанія пластинки.

Такимъ образомъ, во все время дѣйствія прибора на станціи А, сила звукового колебанія пластинки производитъ положительную работу, а электромагнитная сила индуктивнаго тока — отрицательную. Здѣсь происходитъ превращеніе звуковой энергіи въ энергію тока, отчасти непосредственно, вслѣдствіе взаимодѣйствія пластинки и индуктивнаго тока, но главнымъ образомъ черезъ посредство магнитной энергіи, вслѣдствіе взаимодѣйствій между пластинкой и магнитомъ и между магнитомъ и индуктивнымъ токомъ. На станціи В электромагнитная сила тока производитъ все время положительную работу, а сила звукового колебанія пластинки—отрицательную. Здѣсь происходитъ обратное превращеніе энергіи тока въ звуковую, опять въ главной части черезъ посредство магнитной энергіи. Такимъ образомъ передается звуковая энергія отъ пластинки А пластинкѣ В посредствомъ превращеній въ магнитную энергію, этой въ электрическую, обратно въ магнитную и потомъ въ звуковую. Но и здѣсь, какъ и при передачѣ работы, пластинка В возстановляетъ только часть той звуковой энергіи, которую получаетъ пластинка А. Остальная часть превращается въ теплоту: *a*) въ проводахъ, по которымъ идетъ токъ, *b*) въ пластинкахъ вслѣдствіе внутренняго тренія, зависящаго отъ несовершенной упругости ихъ и *c*) въ магнитахъ, вслѣдствіе внутренняго тренія ихъ частицъ при усиленіи и ослабленіи магнитизма.

Заключеніе.

Изъ всего сказаннаго о превращеніяхъ энергіи вытекаетъ тотъ выводъ, что при всѣхъ разнообразныхъ явленіяхъ, совершающихся въ мірѣ, общее количество энергіи сохраняется неизмѣннымъ. Энергія вѣчна. Всѣ явленія представляютъ только превращенія энергіи изъ однѣхъ формъ въ другія, но ни въ какомъ явленіи никакое количество энергіи не уничтожается и не создается вновь. Это—самый общій, основной законъ природы, какимъ только обладаетъ наука. Честь открытія его принадлежитъ *Роберту Майеру*. Разработка этого закона и примѣненіе ко всѣмъ областямъ явленій представляетъ самое великое пріобрѣтеніе второй половины нашего столѣтія и составляетъ славу цѣ-

лаго поколѣнія величайшихъ физиковъ: *Гельмгольца*, *Джауля*, *Вильяма Томсона* (лорда Кельвина), *Клаузіуса*, *Максвелля*.

Однако законъ сохраненія энергіи, утверждая ея вѣчность, неуничтожаемость, нисколько не касается условій ея превратимости и нисколько не обусловливаетъ вѣчности ея превращеній, составляющихъ самую глубокую сущность всей матеріальной жизни, какую только удалось прочно установить человѣческому уму. Поэтому естественно поставить вопросъ: представляютъ-ли эти превращенія въ мірѣ тотъ вѣчный круговоротъ, о которомъ любятъ говорить философы и поэты, или всѣ они идутъ въ одномъ опредѣленномъ направленіи къ какому нибудь концу?

Для того, чтобы энергія того или другого рода была превратима, нужны извѣстныя условія. Для превратимости вѣсовой энергіи нужно, чтобы массы извѣстной плотности лежали выше соотвѣтствующаго имъ слоя земли (§ 31); для превратимости кинетической энергіи нужно существованіе разностей скоростей, или относительныхъ скоростей (§ 32); для превратимости теплоты нужно, чтобы существовали разности температуръ (§ 49). Теплота посредствомъ лучеиспусканія и теплопроводности постоянно переходитъ отъ болѣе нагрѣтыхъ тѣлъ къ менѣе нагрѣтымъ. Поэтому превратимость теплоты постоянно уменьшается безъ того, чтобы возрастала превратимость какого либо другого рода энергіи. При всякомъ превращеніи исчезаетъ извѣстное количество превратимой энергіи какого либо рода и вмѣсто нея появляется эквивалентное количество энергіи другого рода. Если эта послѣдняя превратима, то общая превратимость энергіи въ мірѣ не уменьшается; если же она вся или частью не превратима, то превратимость энергіи уменьшается. При всѣхъ превращеніяхъ энергіи, производимыхъ различными машинами, неизбѣжно нагрѣваніе частей машинъ посредствомъ тренія. Эта теплота излучается въ міровое пространство и становится непревратимой. При работѣ животныхъ, въ тѣлѣ ихъ развивается излишнее количество теплоты, которая излучается и становится непревратимой. При всякомъ превращеніи теплоты въ работу, будетъ ли то посредствомъ паровой машины, или посредствомъ термоэлектрическаго тока, только часть превратимой теплоты, заимствуемой въ топкѣ или тепломъ спаѣ, превращается въ работу и, слѣд., создаетъ эквивалентное количество превратимой энергіи другого рода, другая же часть передается холодильнику, или холодному спаю и становится не превратимой, или менѣе превратимой. При превращеніи энергіи тока часть ея неизбѣжно превращается въ теплоту (§ 102), которая если и можетъ быть утилизирована, то во всякомъ случаѣ только частью превращена. Все это приводитъ къ выводу, что количество превратимой энергіи постоянно уменьшается, или, какъ говорятъ, энергія постоянно разсѣевается.

Если мы ограничимся разсмотрѣніемъ одной солнечной системы, то должны будемъ прійти къ заключенію, что если отношеніе между всѣмъ запасомъ собранной въ ней превратимой энергіи и тѣмъ количествомъ, которое ежегодно разсѣевается, и очень велико, быть можетъ громадно, все же оно не можетъ быть безконечно велико; а потому этотъ запасъ долженъ рано или поздно истощиться, всѣ превращенія должны прекратиться, а съ ними всѣ перемѣны, всѣ силы и ихъ дѣй-

ствія, вся матеріальная жизнь,—и вся система должна прійти къ состоянію полнаго равновѣсія и относительнаго покоя всѣхъ частей.

Но можно ли распространить этотъ выводъ на всю вселенную? Если весь міръ состоитъ изъ системъ, подобныхъ нашей солнечной, только въ различныхъ фазахъ развитія, начиная съ первобытныхъ туманностей и до потухшихъ солнцъ — что весьма вѣроятно, — то мы вправѣ ожидать, что та же участь ждетъ каждую систему въ отдѣльности. Но это еще не будетъ покоемъ всей вселенной, потому что системы могутъ обладать относительными скоростями и другими различіями, размѣровъ которыхъ мы не въ состояніи предугадать. И если міръ безконеченъ, то изъ столкновеній этихъ умершихъ уже системъ не будутъ ли возникать все новыя молодыя системы и новая жизнь безъ конца? Это вопросъ, передъ которымъ мы должны остановиться, довольствуясь констатированіемъ существующей въ мірѣ тенденціи къ разсѣянію энергіи.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

ЗАДАЧИ.

№ 266. Имѣетъ ли цѣлыя рѣшенія неопредѣленное уравненіе

$$y(10x^2+21y^5-30z^3)=578?$$

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 267. Даны двѣ окружности, имѣющія внѣшнее касаніе. Черезъ точку касанія E проведена прямая, пересѣкающая ихъ въ точкахъ C и D. Вокругъ точки E радіусомъ $^1/_2$ $\overline{CD}$ описана окружность. Показать, что радіусъ ϱ круга, имѣющаго внутреннее касаніе съ послѣднею окружностью и внѣшнее съ двумя первыми, опредѣляется по формулѣ

$$\varrho=\frac{(r_1+r_2)^3\cos^2\alpha}{4r_1r_2+2(r_1+r_2)^2\cos\alpha},$$

гдѣ r_1 и r_2 суть радіусы данныхъ окружностей, и α—уголъ, образованный сѣкущею CD съ линіей центровъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 268. Дана окружность радіуса R и прямая D, разстояніе которой отъ центра окружности $=a$. Найти на окружности такую точку M, чтобы прямая, соединяющая центръ окружности съ серединой перпендикуляра MM' на прямую D, равнялась данной прямой b.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 269. Въ правильномъ восьмиугольникѣ *ABCDEFGH* проведена діагональ *AD*. Найти геометрически отношеніе къ ней стороны восьмиугольника.

А. Бачинскій (Холмъ).

№ 270. Построить треугольникъ по даннымъ периметру и двумъ высотамъ.

П. Хлѣбниковъ (Тула).

№ 271. Найти остатокъ отъ дѣленія на 13 выраженія

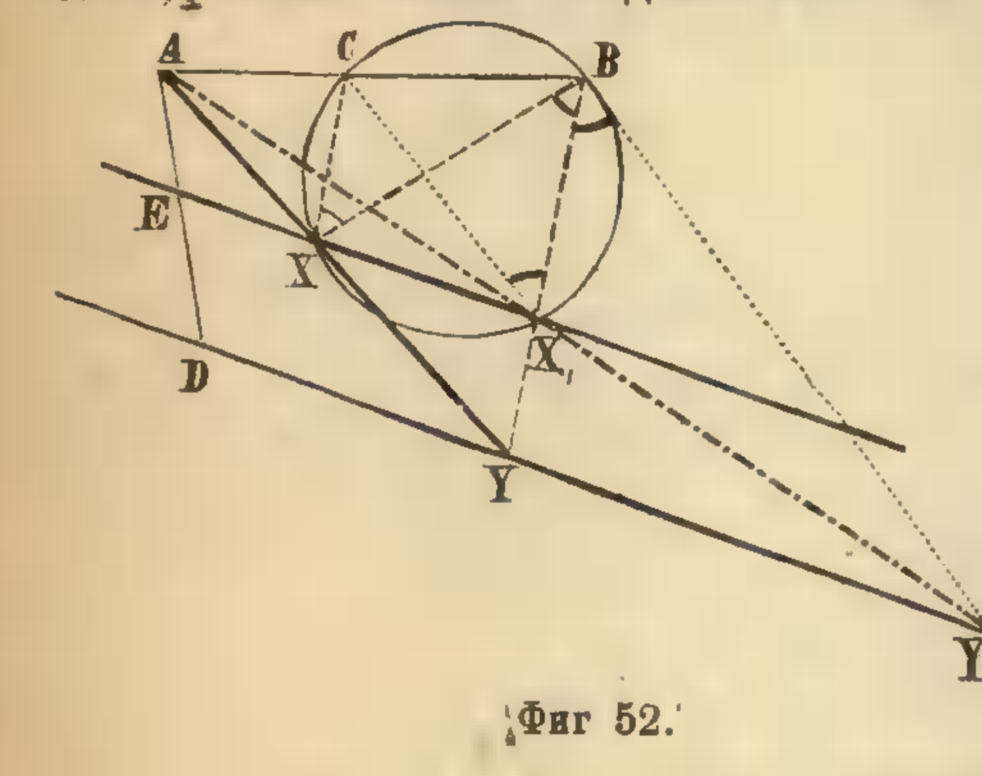
$$7^{100} + 11^{100}.$$

(Заимств.). *В. Г.* (Одесса).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 132 (3 сер.). Даны двѣ параллели и точки *A* и *B*. Провести сѣкущую *AXУ* такъ, чтобы ея отрѣзокъ *XУ* между параллелями былъ видѣнъ изъ *B* подъ даннымъ угломъ.

Допустимъ, что задача рѣшена и перенесемъ параллельно *BУ* такъ, чтобы точка *B* двигалась по *AB* (фиг. 52) и пришла въ *C*, а *У*—въ *X*. Тогда точка *C* извѣстна, ибо $AC:CB = AX:XУ$, а это послѣднее отношеніе равно отношенію отрѣзковъ $AE:ED$ любой сѣкущей *AD*, проведенной изъ *A*. Такъ какъ $\angle CXB = \angle XBУ$, то остается на *BC* описать дугу, вмѣщающую данный уголъ зрѣнія. Дуга эта пересѣкаетъ ближайшую параллель въ точкахъ *X* и X_1. Сѣкущія *AXУ* и $AX_1У_1$ удовлетворяютъ требованіямъ задачи.



Фиг 52.

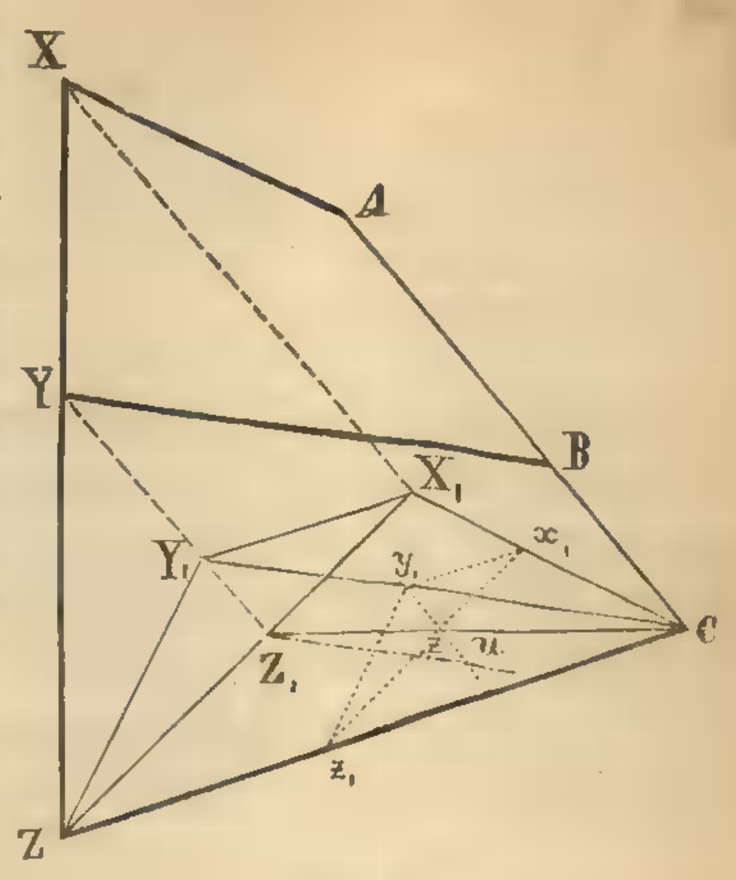
В. Буханцевъ (Новочеркасскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула).

№ 133 (3 сер.). Даны три прямыя, и на нихъ по точкѣ *A*, *B* и *C* такъ, что линія *ABC* прямая. Провести къ этимъ прямымъ сѣкущую *XУZ* такъ, чтобъ отношенія между отрѣзками *AX*, *BУ* и *CZ* имѣли данную величину.

Допустимъ, что задача рѣшена, перенесемъ параллельно *AX* въ CX_1 и *BУ* въ $CУ_1$ и продолжимъ $УУ_1$ до встрѣчи съ ZX_1 въ точкѣ Z_1 (фиг. 53). Такъ какъ форма фигуры $CX_1У_1Z$ и направленіе $У_1Z_1(\parallel AC)$

извѣстны, то можно найти отношеніе $X_1Z:Z_1Z$, равное $XX_1:YZ_1$. Опредѣливъ это отношеніе, можно найти Z_1Y, а вычтя изъ него $YY_1 = BC$, опредѣлимъ и Z_1Y_1.— Изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующее рѣшеніе задачи. Изъ точки C проводимъ линіи, параллельныя AX и BY и откладываемъ на нихъ и на CZ соотвѣтственно отрѣзки Cx_1, Cy_1 и Cz_1, находящіеся въ данныхъ отношеніяхъ. Затѣмъ проводимъ $y_1z \| BC$. Пусть $x_1z:zz_1 = m:n$. Находимъ длину Y_1Z_1, пользуясь равенствомъ:

$$Y_1Z_1 = \frac{n}{m+n}AC - BC.$$



Фиг. 53.

Для рѣшенія задачи надо $\triangle\, x_1y_1z_1$ умножить на $Y_1Z_1:y_1z$. Для этого проще всего на прямой y_1z отъ точки y_1 отложить $y_1u = Y_1Z_1$ и провести изъ точки u линію, параллельную Cy_1 до встрѣчи съ CZ_1 въ точкѣ Z_1. Проведя $Z_1Y \| BC$, получимъ точку Y.

В. Буханцевъ (Новочеркасскъ).

№ 136 (3 сер.). На данной прямой найти точку, разстояніе которой отъ данной точки относилось бы къ разстоянію отъ другой данной прямой, какъ $m:n$, гдѣ m и n два данные прямолинейные отрѣзка.

Пусть данныя прямыя AB и BC пересѣкаются въ точкѣ B, а S есть данная точка. Проведемъ параллельно BC прямую MN, находящуюся отъ BC на разстояніи n, и пусть MN пересѣкаетъ AB въ точкѣ x. Изъ точки x радіусомъ m описываемъ дугу, пересѣкающую прямую SB въ точкахъ R и R'. Очевидно, что прямыя SX и SX', проведенныя изъ S соотвѣтственно параллельно xR и xR', пересѣкаютъ прямую AB въ искомыхъ точкахъ X и X'.

Губергрицъ (Кременчугъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *Б. Гальпернъ* (Пинскъ); *И Барковскій* (Могилевъ губ.); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.*

№ 189 (3 сер.). Рѣшить уравненіе

$$\cos^3x.\sin3x + \cos^2 4x + \sin^3x.\cos3x = {}^3/_4.$$

Такъ какъ

$$\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3x \text{ и } \cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x,$$

то данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\cos^3x(3\sin x - 4\sin^3x) + \sin^3x(4\cos^3x - 3\cos x) + \cos^2 4x =$$

$$= \cos^2 4x + 3\cos^3x.\sin x - 3\cos x.\sin^3x = \cos^2 4x + 3\sin x.\cos x(\cos^2x - \sin^2x) =$$

$$= \cos^2 4x + {}^3/_2\sin2x.\cos2x = \cos^2 4x + {}^3/_4\sin4x = {}^3/_4,$$

или

$$\sin^2 4x - {}^3/_4 \sin 4x - {}^1/_4 = 0,$$

$$\text{откуда } \sin 4x = 1 \text{ или } \sin 4x = -{}^1/_4.$$

А. Бачинскій (с. Любень); *А. Шантыръ*, *Э. Заторскій* (Спб.); *А. Павлычевъ* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 190 (3 сер.). Найти двѣ прогрессіи: ариѳметическую a_1, a_2, a_3 и геометрическую α_1, α_2, α_3 при условіи, что сумма членовъ обѣихъ прогрессій 192, $a_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 - a_1 = 102$ и что α_3 состоитъ изъ тѣхъ же цифръ, что и a_3, но межъ нихъ вставленъ нуль. Въ обѣихъ прогрессіяхъ всѣ члены суть числа цѣлыя и положительныя.

Пусть r есть разность ариѳметической прогрессіи, q—знаменатель и a—первый членъ геометрической прогрессіи. Тогда

$$4a + aq + aq^2 = 192, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$aq^2 - a + r = 102 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Изъ условій задачи слѣдуетъ, что a_3 есть число двузначное, первая цифра котораго равна единицѣ; поэтому α_3 есть трехзначное число, первая цифра котораго есть 1, вторая 0, а третья $a + r - 10$, т. е.

$$aq^2 = 100 + a + r - 10 = 90 + a + r \quad \ldots \quad (3)$$

Уравненія (2) и (3) даютъ $r = 6$; подставивъ это значеніе r въ уравненіе (2), найдемъ $q = 3$ и $a = 12$. Слѣдовательно искомыя прогрессіи суть:

$$\div 6,\ 12,\ 18 \text{ и } \dot{\dot{\div}}\, 12 : 36 : 108.$$

А. Бачинскій (с. Любень); *L.* (Тамбовъ); *Э. Заторскій* (Спб.).

№ 191 (8 сер.). Показать, что выраженіе

$$n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$$

при n цѣломъ и положительномъ дѣлится на 24 безъ остатка.

1. Такъ какъ данное выраженіе обращается въ число, кратное 24-хъ, при $n = 1$ и $n = 2$, то для рѣшенія задачи надо показать, что разность между выраженіемъ, получающимся замѣною въ данномъ n на $n + 1$, и даннымъ дѣлится на 24. Разность эта равна

$$6n^5 + 14n^3 + 4n = 2(3n^5 + 7n^3 + 2n) \quad \ldots \quad (1)$$

Такъ какъ выраженіе

$$3n^5 + 7n^3 + 2n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

при $n = 1$ и при $n = 2$ обращается въ число, кратное 12-и, то надо показать, что разность между выраженіемъ, получающимся изъ (2) при замѣнѣ въ немъ n на $n + 1$, и выраженіемъ (2) дѣлится на 12. Разность эта равна

$$15n^4 + 30n^3 + 51n^2 + 36n + 12 = \text{кр. } 12 + 3(5n^4 + 10n^3 + 17n^2) \quad . \quad (3)$$

При $n=1$ и при $n=2$ выраженіе въ скобкахъ дѣлится на 4; чтобы показать, что оно раздѣлится на 4 при всякомъ n, составляемъ разность между выраженіемъ, получающимся замѣною n на $n+1$ въ выраженіи $5n^4+10n^3+17n^2$, и этимъ послѣднимъ. Разность эта равна

$$20n^3+60n^2+84n+32=4(5n^3+15n^2+21n+8),$$

т. е. дѣлится на 4. Поэтому выраженіе (3) дѣлится на 12 и данное— на 24.

Г. Легошинъ (с. Знаменка).

2. Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$12n(n-1)-44n(n-1)(n+1)+n(n-1)(n+1)(n+2)(n^2-5n+17),$$

легко показать, что каждый членъ этого выраженія дѣлится на 24.

А. Павлычевъ, (Иваново-Вознесенскъ); *М. Зиминъ* (Орелъ); *ученица Муромской женской гимназіи Б.*

№ 192 (3 сер.). Рѣшить уравненія:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=z,$$

$$2x+2y+p=0,$$

$$z^4+pz^2+q=0.$$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ и замѣнивъ въ немъ z^2 его значеніемъ, опредѣленнымъ изъ 3-го уравненія, и $x+y$ на $-p/_2$, найдемъ

$$xy=\frac{p^2-4q}{16}.$$

Такимъ образомъ x и y суть корни уравненія:

$$t^2+\frac{p}{2}t+\frac{p^2-4q}{16}=0,$$

т. е. $x=\dfrac{-p\pm2\sqrt{q}}{4}, y=\dfrac{-p\mp2\sqrt{q}}{4}, z=\pm\sqrt{-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}}$.

М. Зиминъ (Орелъ); *Э. Заторскій, А. Шантыръ* (Спб.); *В. Соковичъ, К. Зновицкій* (Кіевъ); *L., L. R.* (Тамбовъ); *А. Бачинскій* (с. Любень); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *А. П* (Ломжа); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *неизвѣстный* (Бѣлостокъ).

№ 461 (2 сер.). Показать, что три различныхъ числа, расположенныхъ въ одномъ и томъ же порядкѣ, не могутъ одновременно составлять и ариѳметической и геометрической прогрессіи.

Три различныхъ числа, расположенныхъ въ извѣстномъ порядкѣ, образуютъ ариѳметическую прогрессію; при другомъ расположеніи они даютъ геометрическую прогрессію. Найти эти числа въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ:

1) произведеніе ихъ равно 216;

2) квадраты ихъ суть тангенсы угловъ нѣкотораго треугольника.

I. Пусть числа x, y, z составляютъ одновременно и ариѳметическую и геометрическую прогрессію. Имѣемъ:

$$y = \frac{x+z}{2}, y = \sqrt{yz}, \text{ откуда } \frac{x+z}{2} = \sqrt{yz},$$

что возможно лишь при $x = z$, ибо среднее ариѳметическое различныхъ чиселъ всегда больше ихъ средняго геометрическаго.

II. a) Условія задачи даютъ систему:

$$2y = x + z;\ x^2 = yz;\ xyz = 216.$$

Рѣшивъ ее, найдемъ:

$$x = 6,\ y_1 = 6,\ y_2 = -3,\ z_1 = 6,\ z_2 = -12.$$

Такимъ образомъ искомыя числа суть: 6,—3,—12.

b) Извѣстно, что во всякомъ треугольникѣ

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C.$$

Поэтому имѣемъ систему:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2z^2;\ 2y = x + z,\ x^2 = yz.$$

Рѣшивъ ее, найдемъ:

$$x_1 = \sqrt[4]{3}, x_2 = -\frac{\sqrt[4]{21}}{\sqrt{2}}, y_1 = \sqrt[4]{3}, y_2 = \frac{\sqrt[4]{21}}{2\sqrt{2}}, z_1 = \sqrt[4]{3}, z_2 = \sqrt{2}.\sqrt[4]{21}.$$

Такимъ образомъ искомыя числа суть:

$$\sqrt{2}.\sqrt[4]{21}; -\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{21}}{2}; \frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{21}}{4}.$$

К. Щиголевъ (Курскъ).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 16-го Декабря 1895 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 29.

d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n
3	1	»	»	»	»
7	6	3	2	2	— 2.
11	2	1	»	»	»
13	6	3	»	»	4.
17	16	8	4	4	
			2	— 2	— 5.
..	..	..	..	..	..
103	34	17	12	8	
			4	9	
			2	— 3	31.
..	..	..	..	..	..

Пользоваться этой таблицей должно слѣдующимъ образомъ.

Чтобы найти остатокъ отъ дѣленія какого нибудь числа N напр. на 17,

1) дѣлимъ это число на грани, начиная справа, по $p = 16$ цифръ, если число цифръ въ N больше 16, и полученныя грани складываемъ.

2) Найденное число N' дѣлимъ на двѣ грани по $\frac{p}{2} = 8$ цифръ въ каждой и изъ правой грани вычитаемъ лѣвую.

3) Въ полученномъ числѣ N'' отдѣляемъ справа $k = 4$ цифры, лѣвую часть умножаемъ на $\alpha = 4$ и складываемъ съ правою частью; операцію эту повторяемъ столько разъ, сколько возможно; затѣмъ, въ полученномъ такимъ образомъ числѣ отдѣляемъ справа $k = 2$ цифры, лѣвую часть умножаемъ на — 2 и складываемъ съ правою частью; повторивъ эту операцію столько разъ, сколько возможно, получимъ число N'''.

4) Дѣлимъ десятки числа N''' на $n = -5$ и полученное частное складываемъ съ полученнымъ остаткомъ, приписавъ къ нему предварительно цифру единицъ числа N'''. Въ результатѣ получимъ число меньшее 17, которое и будетъ остаткомъ отъ дѣленія числа N на 17.

Exercices divers. Par *Aug. Boutin.* №№ 369—375.

Baccalauréats.

Nécrologie. Скончался знаменитый астрономъ *Francisco Denza*, президентъ академіи *Nuovi Lincei* и директоръ римской обсерваторіи.

Question. № 572.

Questions proposées. №№ 610—619. *Д. Е.*

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Bergmans. Compléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des classes supérieures de la section scientifique des athénées et des collèges. Gand. In- 8⁰, 246 p. en autographie. fr. 5,00.

Darboux, G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitésimal. Troisième partie: Lignes géodésiques et Courbure géodésique; Paramètres différentiels; Déformation des surfaces. In- 8⁰, VIII—512 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 15,00.

Dessenon, E. Elements de gèométrie analytique, à l'usage des candidats aux Ecoles centrale et navale et des élèves de première année de la classe de mathématiques spéciales 2-e édition. In- 8⁰, VIII—523 p. avec fig. Paris. Hachette et C-e. fr. 7.50.

Seguier, Prof. *J., S. J.* Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fundamentales d'après Kronecker. gr. 8⁰, VIII + 339 p. Berlin, F. L. Dames. M. 12,00.

Tannery, J. Leçons d'arithmétique théorique et pratique. In- 8⁰, XII-510 p. avec fig. Paris, Bolin et C-e.

Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'académie impériale des sciences de St.-Petersbourg. Tome VII. Livr. 3 et dernière. Lex.—8⁰. (III + + IV + 353—546 p. + 8 pl.). St.-Petersbourg, L. Voss' Sort. M. 8,75.

Jubinal, H. Démonstration du postulatum d'Euclide. In- 8⁰, 31 p. et 3 pl. Tarbes.

Koenigs, G. Mémoire sur les lignes géodésiques. In- 4⁰, 318 p. avec fig. Paris.

Bouasse, H. Introduction à l'étude des théories de la mécanique. In- 8⁰, 311 p. avec fig. Paris, G. Carré.

Koenigs, G. Leçons de cinématique professées à la Faculté des sciences de Paris. In- 8⁰, IX- 242 p. avec fig. Paris, Hermann.

Pélissier, J. M. Leçons nouvelles de géométrie élémentaire, d'après les programmes de 1891, pour les classes de lettres et pour la première partie du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique. In- 16⁰, 239 p. avec fig. Paris. Vic et Amat.

Dumont, F. Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre. II. In- 8⁰, 96 p. Annecy.

Lacour, E. Sur des fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles (thèse). In- 4⁰, 53 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Le-Roux, J. Sur des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (thèse). In- 4⁰, 95 p. Paris, Gauthier-Villars et fils

Niewenglowski, B. Cours de géométrie analytique, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement. T. 2: Construction des courbes planes; Compléments relatifs aux coniques. In- 8⁰, 296 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 8,00.

Nouveau traité d'arithmétique décimale, contenant toutes les operations ordinaires du calcul, les fractions, l'extraction des racines, le sistème métrique, etc.; par les Frères des écoles chrétiennes. In- 18 jésus, IV + 376 p. Paris, Poussielgue.

Picart, L. Sur le mouvement d'un corps de figure variable. In- 8⁰, 23 p. Bordeaux.

БИБЛIОГРАФИЧЕСКIЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ НѢМЕЦКИХЪ ИЗДАНIЙ.

Математика.

Láska, W., Dr. Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik. 3. Lfg. 2. Abth. gr. 8⁰. (VII + S. 777—1071 + XVI S. m. 3 Taf.) Braunschweig. F. Vieweg & Sohn. M. 7,50 (kplt. M. 26).

Nivellements der trigonometrischen Abtheilung der Landes-Aufnahme. 8. (Schluss-) Bd. gr. 4⁰. (XII + 252 S. m. 7 Taf.). B. E. S. Mittler & Sohn. Kart. baar n. n. M. 10.

Suchanek, Ed., Dr. Dyadische Coordination der bis 100,000 vorkommenden Primzahlen zur Reihe der ungeraden Zahlen. Lex.-8⁰ (168 S.). Wien. F. Tempsky. n. M. 2,60.

Cwojdzinski, Tadeusz. Anwendung der Fuchssen Theorie auf die Differentialgleichung der Gaussschen hypergeometrischen Reihe. gr. 8⁰. (45 S.). Brody. F. West. n. M. 1.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

JOURNAL

de mathématiques élémentaires.

1895.—№ 4.

Questions d'enseignement. Par M-me V-ve *F. Prime.* (Suite). Содержаніе: выводъ формулы

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$$

на основаніи теоріи проэкцій; приложеніе той же теоріи къ выводу начальныхъ формулъ аналитической геометріи въ прямолинейныхъ координатахъ); выводъ основной формулы сферической тригонометріи:

$$\cos a=\cos b.\cos c+\sin b.\sin c.\cos A.$$

Bectification approchée du cercle. Par. M. *M. d'Ocagne.* Вслѣдствіе равенства

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\pi+0{,}0047,$$

построеніе π съ точностью до 0,005 приводится къ простымъ построеніямъ корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. M. d'Ocagne предлагаетъ такое построеніе суммы $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ Въ кругѣ ABA' (фиг. 63), радіусъ котораго = 1, строится $\angle A'OB=45^0$; черезъ B проводятся параллель къ OA' до пересѣченія въ C съ касаоельной къ кругу въ точкѣ A'; биссектриса угла COA продолжается до пересѣченія въ D съ касательной къ кругу въ точкѣ A; отрѣзокъ $AD=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, т. е. приблизительно равенъ полуокружности ABA'. Дѣйствительно,

$$\mathrm{tg}AOD=\mathrm{tg}\frac{AOC}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos AOC}{1+\cos AOC}},$$

но

$$\cos AOC=-\cos A'OC=-\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2A'OC}}=-\sqrt{\frac{2}{3}};$$

поэтому:

$$\mathrm{tg}AOD=\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\sqrt{3}+\sqrt{2},$$

т. е.

$$AD=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Фиг. 63.

Application de la géométrie analytique à la résolution des équations. Par *E. N. Barisien.* Система ур-ній

$$xy = a^2, \qquad (1)$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)^2, \qquad (2)$$

по исключеніи y, приводитъ къ ур-нію 8-й степ. относительно x, которое въ свою очередь приводится къ ур-нію 4-й степ., рѣшеніе котораго представляетъ большія трудности. Но если x и y разсматривать какъ прямоугольныя координаты, то, замѣнивъ ихъ полярными координатами по формуламъ

$$x = \varrho.\cos\vartheta, \; y = \varrho.\sin\vartheta,$$

получимъ ур-нія

$$\varrho^2 = \frac{2a^2}{\sin 2\vartheta}, \qquad (3)$$

$$\varrho^2 = 4a^2\cos 2\vartheta, \qquad (4)$$

изъ которыхъ слѣдуетъ, что

$$\sin 4\vartheta = 1.$$

Взявъ рѣшеніе этого ур-нія $\vartheta = \frac{\pi}{8}$, найдемъ соотвѣтственное значеніе для ϱ.

$$\varrho = a\sqrt{2\sqrt{2}},$$

а затѣмъ для x и y:

$$x = \varrho\cos\vartheta = a\sqrt{2+\sqrt{2}}.\cos\frac{\pi}{8} = a\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

$$y = \varrho\sin\vartheta = a\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sin\frac{\pi}{8} = a\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Sur le deplacement des figures semblables. Par M. *G. Tarry.*

Теорема. Двѣ фигуры, прямо или обратно подобныя, но не подобно расположенныя, всегда имѣютъ двойную (общую) прямую, подобные отрѣзки которой, ограниченные соотвѣтственными точками фигуръ, имѣютъ одно и то же направленіе, если фигуры прямоподобны, и противоположныя направленія въ случаѣ обратнаго подобія.

Эту двойную прямую авторъ называетъ *осью подобія* фигуръ.

Соотвѣтственные отрѣзки оси подобія имѣютъ всегда общую (двойную) точку. Плоскость, проходящая черезъ эту точку перпендикулярно къ оси подобія, есть двойная (общая) плоскость подобныхъ фигуръ. Отсюда слѣдуетъ *теорема Dorlet*:

Двѣ фигуры, прямо или обратно подобныя, имѣютъ всегда двойную плоскость, двойную прямую (ось подобія), перпендикулярную къ этой плоскости, и двойную точку, которая есть пересѣченіе двойной прямой съ двойной плоскостью. Вращеніемъ около оси подобія подобныя фигуры могутъ быть сдѣланы подобно-расположенными.

Въ случаѣ равенства фигуръ ось подобія ихъ можетъ быть безконечно удалена. Разсматривая различные случаи, могущіе быть при этомъ, авторъ приходитъ къ слѣдующимъ выводамъ.

Двѣ обратно равныя фигуры могутъ быть приведены въ положеніе симметричное относительно плоскости или точки или вращеніемъ около нѣкоторой прямой, или параллельнымъ перенесеніемъ.

Всякое измѣненіе въ положеніи неизмѣняемой системы можетъ быть разсматриваемо какъ слѣдствіе геликоидальнаго движенія системы около нѣкоторой прямой.